# 测试题解答

**1.** 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5}{5x^2+3}\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

**解** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5}{5x^2+3}\ln(1+\dfrac{1}{x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5}{5x^2+3}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5}{5x^3+3x}$$

$$=\frac{3}{5}$$

# 测 试 题 解 答

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^x=8$, 求 $a$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{x-a})^x$

$=\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3a}{x-a}\cdot x]=\exp(3a)=e^{3a}$

$e^{3a}=8,\quad 3a=\ln 8,\quad a=\ln 2$

❖配 e 法 设 $\lim u(x)=0,\ \lim v(x)=\infty$, 则有

$$\lim(1+u)^v=\lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv}=e^{\lim uv}.$$

# 测试题解答

**3.** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x(e^x-1)}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{x(e^x-1)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

# 测试题解答

**4.** 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-x})$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$=3$$

# 测试题解答

5. 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\exp[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x]$

$$=\exp[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos^2 x}{\sin x+1}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}]=\exp[-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+1}\cdot\cos x]$$

$$=\exp(0)=e^0=1$$

❖配 e 法 设 $\lim u(x)=0,\ \lim v(x)=\infty$, 则有

$$\lim(1+u)^v=\lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv}=e^{\lim uv}.$$

# 测试题解答

**6.** 若 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+Ax+B}{x-1}=3$，求 $A,B$.

**解** $\lim_{x\to1}(x^2+Ax+B)=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+Ax+B}{x-1}\cdot(x-1)=0$

$1+A+B=0,\quad A=-1-B$

$x^2+Ax+B=x^2-(1+B)x+B=(x-1)(x-B)$

$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+Ax+B}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-B)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x-B)=1-B=3$

$B=-2,\quad A=-1-B=1$

# 测试题解答

**7.** 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & 0<x<1 \end{cases}$，求 $a$ 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

**解**　$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续

$\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

而　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=a$

所以 $a=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})=2$$

# 测 试 题 解 答

**8.** 求 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-1}{\ln|x|}$ 的间断点，并判断其类型.

**解** $f(x)$在其定义域组成区间$(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$和$(1,+\infty)$内连续，间断点为 $x=-1, x=0, x=1$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty,$$

$x=-1$为$f(x)$的无穷间断点

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{\pi}{2}$$

$x=0$为$f(x)$的跳跃间断点

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]}$$

$$=\frac{\pi}{4}+1$$

$x=1$为$f(x)$的可去间断点

# 测 试 题 解 答

9. 求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x-2}\sin\dfrac{1}{x}$ 的渐近线.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-2}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x}=1$

水平渐近线为 $y=1$

函数 $y$ 的间断点为 $x=0,\ x=2$

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-2}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 2} y=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}\sin\frac{1}{x}=\infty$$

铅直渐近线为 $x=2$

# 测 试 题 解 答

**10.** 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}\ (n = 1,2,\Lambda\ )$.

试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限.

**证明** $x_1 = 1 < 3$，假设 $x_n < 3$，则

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3+6} = 3$$

由归纳原理得知数列$\{x_n\}$有上界3

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} > \sqrt{x_n + 2x_n} = \sqrt{3x_n} > x_n$$

因此数列$\{x_n\}$单调增加，且有上界3. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由 $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ 得

$$A = \sqrt{A+6},\quad A = 3,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = A = 3$$