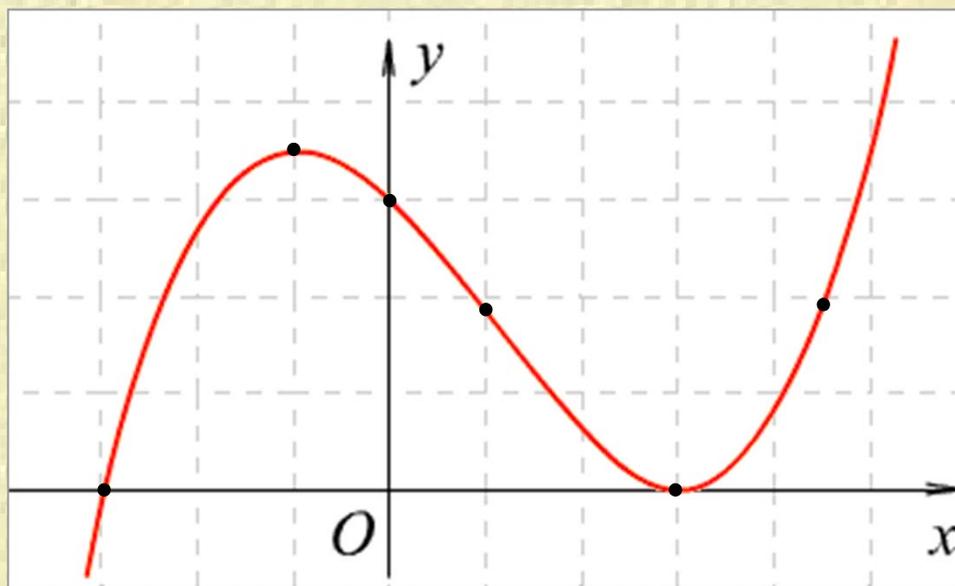




§ 3.6 函数图形的描绘

用描点法作函数图形需要计算许多点，才能画出较精确的函数图形。

当我们对函数曲线的性态有了全面了解之后，只需少数几个点就能画出较精确的函数图形。





❖ 微分法描绘函数图形的一般步骤

1

确定函数的定义域(奇偶性和周期性).

2

讨论函数的单调性和极值, 曲线的凹凸性和拐点, 渐近线.

3

定点作图: 峰点, 谷点, 拐点, 坐标轴交点(适当补点)用光滑曲线连接定点.



例1 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 (1)函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$, $f''(x)=6x-2=2(3x-1)$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1/3, 1$; 令 $f''(x)=0$ 得 $x=1/3$.

(3)曲线性态分析表:

x	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$		$32/27$ 极大		$16/27$ 拐点		0 极小	

(4)特殊点的函数值: $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(3/2)=5/8$.



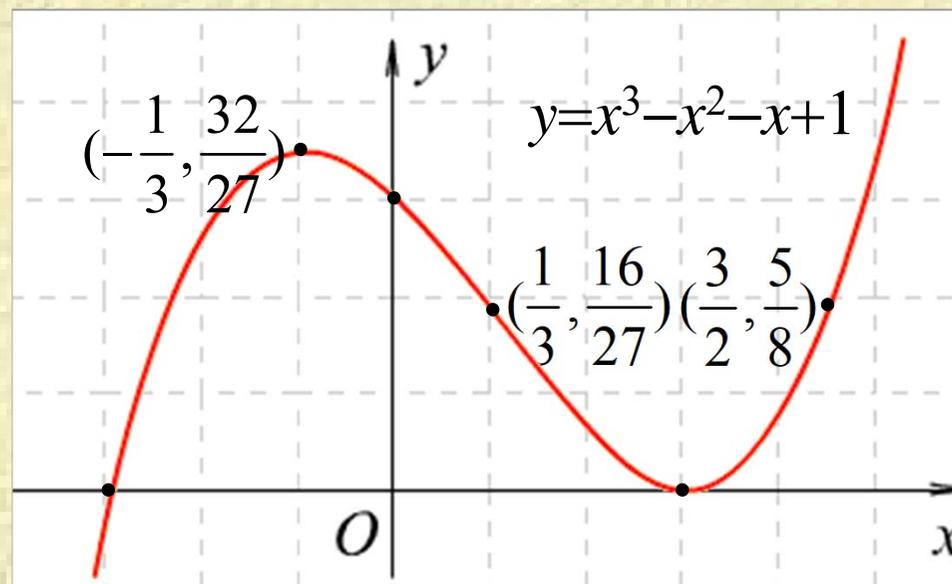
例1 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 曲线性态分析表:

x	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f(x)$		$\frac{32}{27}$ 极大		$\frac{16}{27}$ 拐点		0 极小	

特殊点的函数值: $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(3/2)=5/8$.

描点连线画出图形.





例2 作函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的图形.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,
 $f(x)$ 是偶函数, 图形关于 y 轴对称.

$$(2) f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad f''(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$; 令 $f''(x)=0$, 得 $x=-1$ 和 $x=1$.

(3) 曲线性态分析表:

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$f'(x)$	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 极大		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ 拐点	

(4) 曲线有水平渐近线 $y=0$.



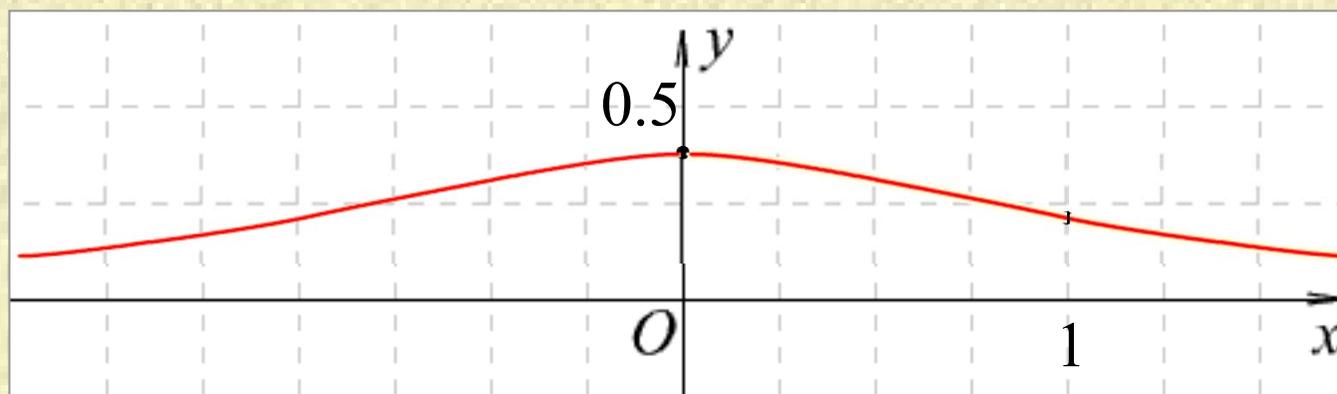
例2 作函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的图形.

解 函数性态分析表:

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$y=f(x)$ 的图形	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 极大	↘	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ 拐点	↘

$y=0$ 是曲线的水平渐近线.

先作出区间 $(0, +\infty)$ 内的图形, 然后利用对称性作出区间 $(-\infty, 0)$ 内的图形.





例3 作函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1)函数的定义域为 $(-\infty, -3)\cup(-3, +\infty)$.

$$(2) f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3}, \quad f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=3$, 令 $f''(x)=0$ 得 $x=6$.

(3)曲线性态分析表:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形			4极大		11/3拐点	

(4)曲线有铅直渐近线 $x=-3$ 与水平渐近线 $y=1$.

(5)特殊点的函数值: $f(0)=1$, $f(-1)=-8$, $f(-9)=-8$,
 $f(-15)=-11/4$.



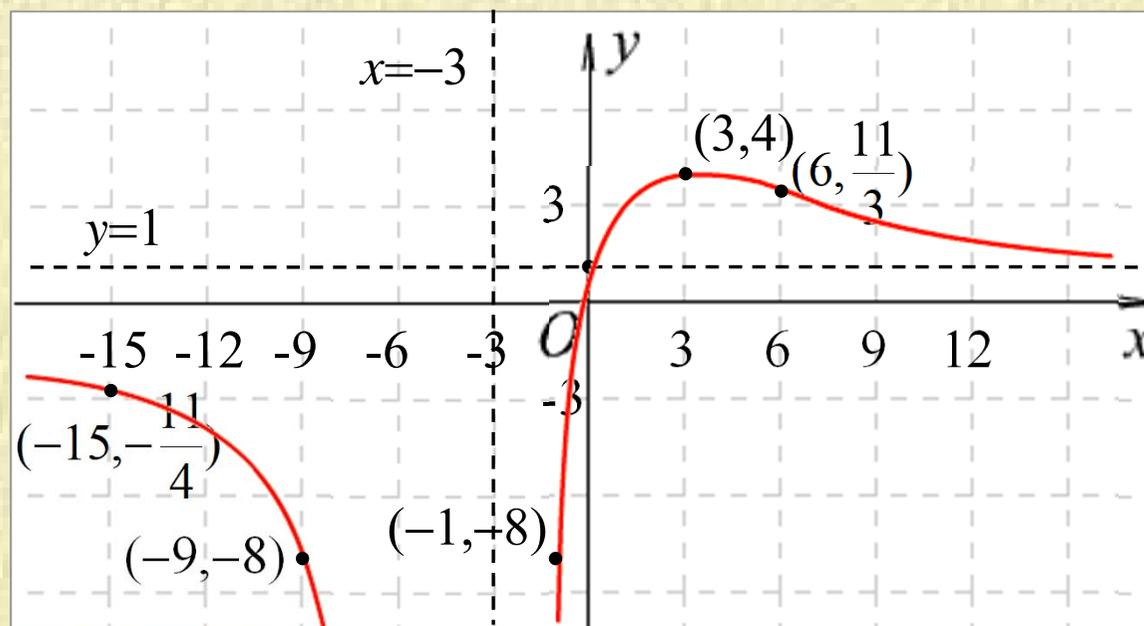
例3 作函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 函数性态分析表:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$y=f(x)$ 的图形			4极大		11/3拐点	

铅直渐近线为 $x=-3$, 水平渐近线为 $y=1$.

$f(0)=1, f(-1)=-8, f(-9)=-8, f(-15)=-11/4$.





作业

习题3-6 (P166):

- 1.
- 4.